MATEMÁTICA

LICENCIATURA

Disciplina

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Módulo 2

GEOMETRIA ANALÍTICA

Marcelo Henriques de Carvalho

INFORMAÇÕES SOBRE O MATERIAL

PREZADO ALUNO,

O presente trabalho foi escrito tendo como norte uma premissa básica: que fosse acessível ao aluno do 1.º ano da faculdade. Para tanto, sua linguagem teria que ser tão clara e didática quanto possível. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos. Críticas e sugestões hão de surgir, e serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo.

Você está de posse de um material auto-suficiente. Este livro foi concebido para que você adquira os fundamentos necessários do cálculo vetorial, da geometria analítica e da álgebra linear para os seus estudos posteriores, relativos à sua formação. O livro foi planejado para que você tenha uma formação de base sólida. Aconselhamos estudá-lo utilizando dois tipos de leitura: uma superficial ou de reconhecimento e outra profunda ou detalhada. A leitura superficial deverá ser a da leitura de cada capítulo, parágrafo, teorema, etc..., todo de uma vez e sem a preocupação de uma compreensão detalhada, mas apenas com o objetivo de que você tenha uma visão do conjunto das idéias em questão.

Aconselhamos que você faça esta forma de leitura pelo menos duas vezes, em cada unidade. Tendo então obtido a idéia geral da unidade na qual está trabalhando, você deverá fazer uma leitura profunda e detalhada, que é o estudo detalhado de cada aspecto do texto analisado, feito com calma e rigor, e só deverá finalizá-la quando a unidade analisada estiver totalmente compreendida, em seus mínimos detalhes. Para esta abordagem você deverá estar munido de uma lápis, borracha e papel. Experimente reproduzir o conteúdo da unidade, em detalhes, mas não de forma decorada e sim como resultado de seu aprendizado. Faça isso e você não se arrependerá do trabalho realizado. Acreditamos que sob a orientação dessas duas abordagens seu aprendizado ocorrerá de forma maximizada.

O livro é composto por dois módulos:

Módulo 1 – Vetores
Módulo 2 – Geometria Analítica

Em cada capítulo, cada seção é organizada em forma de definições, lemas, proposições, teoremas e corolários, muitos deles com demonstrações com certo nível de rigor. No entanto, devido aos objetivos programáticos dessa disciplina, algumas demonstrações foram omitidas, sem prejuízos ao seu aprendizado. O leitor mais ousado pode consultar a bibliografia recomendada, para entender essas demonstrações, mas isso não é uma exigência para esse momento.

Este texto possui muitos exercícios resolvidos, de forma comentada, sobre os diferentes conteúdos abordados. A finalidade deles é esclarecer a teoria apresentada, exemplificá-la, e apresentar um método de resolução, das diferentes questões que são propostas. Isso não impede que você desenvolva outras modalidades de resoluções. O importante é que o seu método seja logicamente consistente. Os exercícios propostos estão apresentados ao longo de cada seção (e não apenas no final de cada capítulo) com o intuito de facilitar ao leitor o emprego dos resultados e técnicas necessárias para resolvê-los.

Ressaltamos que os exercícios resolvidos desempenham um papel importante no aprendizado. Sugerimos ao leitor que, ao estudá-los, utilize o chamado “método do strip-tease” para extrair deles o maior proveito. O método consiste em tapar a resolução do exercício e tentar resolvê-lo. Não conseguindo, descobre-se a primeira linha e tenta-se completar a resolução. Não conseguindo ainda, descobre-se mais uma linha, e assim por diante.

Ao final, apresentaremos algumas referências como leitura alternativa, complementar e até suplementar, dos conteúdos em questão, onde você poderá encontrar outras visões sobre os mesmos assuntos tratados neste texto e, em muitos deles, você encontrará aplicações dos tópicos estudados. O contato com esses assuntos ajudará a ter uma idéia de como a Matemática evoluiu para estruturas mais complexas.

Desejamos a vocês sucesso em seus estudos.

PREFÁCIO

Geometria Analítica é o estudo da geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596 – 1650), que consiste em associar equações aos entes geométricos (reta, plano, etc.), e através do estudo dessas equações, tirar conclusões (com auxílio da álgebra) a respeito destes entes geométricos.

Do ponto de vista da Geometria Analítica, conhecer ou determinar uma reta ou um plano, significa conhecer ou determinar sua equação. A Geometria Analítica encontra na Álgebra seu aliado mais importante. Não apenas a Álgebra elementar, como também a Álgebra Vetorial. Os vetores desempenham um papel importante neste curso, como logo ficará evidente. Eles constituem os instrumentos ideais para o desenvolvimento de muitos conceitos importantes da Física e da Matemática.

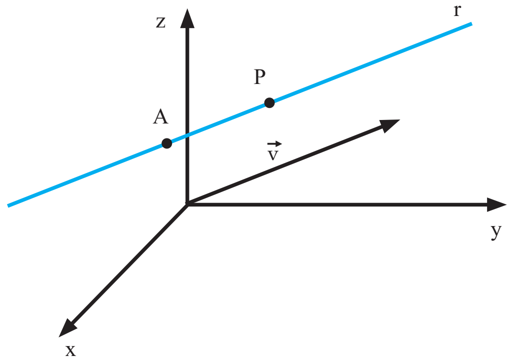
São pré-requisitos para este curso os resultados básicos da matemática elementar estudados no ensino médio. Espera-se também do leitor familiaridade com alguns conceitos da Álgebra Elementar, como determinantes, matrizes e sistemas lineares.

Capítulo I

EQUAÇÕES DA RETA

Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto A = (a, b, c) e um vetor não nulo $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$. Observe que existe uma única reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto P = (x, y, z) pertence à r se, e somente se, o vetor é paralelo a $\overrightarrow{AP}$, como ilustrado na figura a seguir.



Por definição de vetores paralelos, temos que existe um valor real t tal que

$$P - A = \overrightarrow{AP} = t\,\vec{v},$$

ou

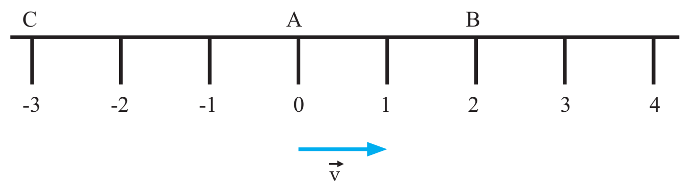
$$P = A + t\vec{v}.$$

Reescrevendo esta equação em termos das coordenadas, temos

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(x_1, y_1, z_1).$$

Qualquer uma das equações acima é denominada **equação vetorial da reta r**. O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor da reta r** e t é denominado **parâmetro**.

Geometricamente, podemos interpretar a equação vetorial da reta r imaginando que r seja uma régua infinita em que o ponto-zero é A e cuja escala tem $\|\vec{v}\|$ como unidade, como ilustrado na figura a seguir. A posição de cada ponto da régua é determinado pelo valor de t. Por exemplo, para t = 2 temos o ponto B. Para t = -3, temos o ponto C. Se trocarmos o vetor diretor $\vec{v}$ por outro, mudaremos a unidade ou o sentido da escala. Se trocarmos o ponto A por outro ponto de r, mudaremos a origem da escala. Assim como muitas réguas podem ser imaginadas sobre a mesma reta, muitas equações vetoriais podem estar associadas a ela.



Exemplo 1: Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A = (1, -1, 4) e tem direção do vetor $\vec{v}$ = (2, 3, 2).

Solução: A equação vetorial de r é

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t\,(2, 3, 2).$$

Se desejarmos obter pontos de r, basta atribuir valores para t. Por exemplo, para t = 1 obtém-se

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + 1\,(2, 3, 2) = (3, 2, 6),$$

e portanto, o ponto (3, 2, 6) $\in$ r. De forma análoga,

- Para t = 2 obtém-se (x, y, z) = (1, -1, 4) + 2 (2, 3, 2) = (5, 5, 8);
- Para t = 3 obtém-se (x, y, z) = (1, -1, 4) + 3 (2, 3, 2) = (7, 8, 10);
- Para t = 0 obtém-se (x, y, z) = (1, -1, 4) + 0 (2, 3, 2) = (1, -1, 4);
- Para t = -1 obtém-se (x, y, z) = (1, -1, 4) - 1 (2, 3, 2) = (-1, -4, 2);

e assim por diante. Todos os pontos acima obtidos pertencem à r. Se t assumir todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos da reta r.

Observe que:

• A cada valor real t corresponde um único ponto P de r. Reciprocamente, a cada ponto P de r corresponde um único valor real t.

• A equação vetorial de uma reta r não é única. Na verdade, existem infinitas equações, pois basta tomar outro ponto de r (em vez de A) ou outro vetor não nulo qualquer que seja paralelo a $\vec{v}$, que teremos uma outra equação vetorial de r.

Exemplo 2: Escreva a equação vetorial da reta que passa pelos pontos A = (-1, 1, 0) e B = (3, 1, -2).

Solução:

O vetor diretor de r é o vetor $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (3, 1, -2) – (-1, 1, 0) = (4, 0, -2). Como ponto da reta, podemos escolher A ou B. Escolhendo B temos a equação vetorial

$$(x, y, z) = (3, 1, -2) + t\,(4, 0, -2)$$

Exercícios

1. Escreva a equação vetorial da reta que passa pelo ponto A e cujo vetor diretor é o vetor , nos seguintes casos:

a) A = (-3, 4, -1) $\quad \vec{v} = (1, -1, 2)$
b) A = (3, 4, 2) $\quad \vec{v} = (1, -1, 0)$
c) A = (-1, 2, -1) $\quad \vec{v} = (0, 0, 3)$
d) A = (0, 0, 0) $\quad \vec{v} = (1, 2, 1)$
e) A = (3, 5, 18) $\quad \vec{v} = (5, 20, -14)$
f) A = (0, 0, 0) $\quad \vec{v} = (1, 0, 0)$

2. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B, nos seguintes casos:

a) A = (3, -1, 4) B = (4, 0, 5)
b) A = (-1, 5, 7) B = (8, 1, 9)
c) A = (0, 1, 3) B = (-1, -1, 2)
d) A = (-1, -2, -3) B = (8, 9, 10)
e) A = (-1, -1, 0) B = (0, 0, 0)
f) A = (0, 0, 0) B = (2, 0, 0)

Exemplo 4: Considere a reta r cuja equação vetorial é (x, y, z) = (1, 0, 1) + t (-1, 1, 2). Determine os pontos de r que distam $\sqrt{6}$ do ponto A = (1, 0, 1).

Solução:

Seja X = (x, y, z) um ponto procurado. Como X é um ponto de r, ele satisfaz as equações de r para algum t, ou seja, existe um valor real t tal que

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t\,(-1, 1, 2) = (1 - t, t, 1 + 2t).$$

Por outro lado, o vetor $\overrightarrow{AX}$ é dado por
$\overrightarrow{AX}$ = X – A = (x, y, z) – (1, 0, 1) = (1 – t, t, 1 + 2t) – (1, 0, 1) = (- t, t, 2t).

A distância de A a X é dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{AX}$.

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \|X - A\| = \sqrt{(-t)^2 + t^2 + (2t)^2} = \sqrt{6t^2} = |t|\sqrt{6}$$

Fazendo agora $|t|\sqrt{6}$, temos $|t| = 1$, e portanto, $t = \pm 1$. Substituindo cada valor de t na equação de r, encontramos os pontos (0, 1, 3) e (2, -1, -1). Isto significa que temos, na verdade, dois pontos procurados, que são (0, 1, 3) e (2, -1, -1).

Exercícios

1. Dada a reta r por sua equação vetorial, e dado o ponto A, determine os pontos de r que distam m de A, nos casos:

a) X = (-1, 0, -1) + t (2, 1, 2) A = (-1, 0, -1) m = 6
b) X = (1, 1, 0) + t (2, 0, 0) A = (1, 2, 2) m = $\sqrt{5}$
c) X = (1, 1, 0) + t (2, 0, 1) A = (2, 1, 1) m = 1/2

2. Dada a reta r pela equação vetorial X = (1, 0, 0) + t (-1, -1, -1) e os pontos A = (0, 0, 1) e B = (1, 1, 1), determine o ponto de r equidistante de A e B.

Equações paramétricas da reta

Considere a equação vetorial da reta r

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(x_1, y_1, z_1),$$

que passa pelo ponto A = (a, b, c) e tem a direção do vetor não nulo $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$. Podemos também escrever esta equação como

$$(x, y, z) = (a + t\,x_1, b + t\,y_1, c + t\,z_1).$$

Pela condição de igualdade de vetores, obtemos

$$\begin{cases} x = a + tx_1 \\ y = b + ty_1 \\ z = c + tz_1 \end{cases}$$

Estas três equações recebem o nome de **equações paramétricas da reta r.**

Exemplo 1: Determine as equações paramétricas da reta r: (-1, 2, 3) + t (2, -3, 0).
Solução:
As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$$

Exemplo 2: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A = (3,-4, 2) e tem direção do vetor $\vec{v}$ = (2, 1, -3).
Solução:
As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Exercícios

1. Escreva equações paramétricas da reta paralela ao vetor $\vec{v}$ e que passa pelo ponto A, nos seguintes casos:
a) A = (-3, 4, -1) $\vec{v}$ = (1, -1, 2)
b) A = (3, 4, 2) $\vec{v}$ = (1, -1, 0)
c) A = (-1, 2, -1) $\vec{v}$ = (0, 0, 3)
d) A = (0, 0, 0) $\vec{v}$ = (1, 2, 1)
e) A = (3, 5, 18) $\vec{v}$ = (5, 20, -14)
f) A = (0, 0, 0) $\vec{v}$ = (1, 0, 0)

Exemplo 4: Dado o ponto A = (2, 3, -4) e o vetor $\vec{v}$ = (1, -2, 3), pede-se:

a) Escrever as equações paramétricas da reta r que passa por A e tem direção de $\vec{v}$.
Solução:
As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Encontrar os dois pontos B e C de r correspondentes aos parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.
Solução:
Das equações paramétricas acima tem-se:

• para t = 1, $\begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases}$ $\therefore$ B = (3, 1, -1) $\in$ r.

• para t = 4, $\begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases}$ $\therefore$ B = (6, -5, 8) $\in$ r.

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
Solução:
Como o ponto tem abscissa 4 (x = 4), temos

4 = 2 + t (1ª. equação de r), e portanto, t = 2.

Agora, substituindo t nas outras equações, temos

$$\begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto procurado é (4, -1, 2).

d) Verificar se os pontos D = (4, -1, 2) e E = (5, -4, 3) pertencem à r.

Solução:
Um ponto pertence à reta se ele satisfaz as equações de r.

• para D = (4, -1, 2) as equações

$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases}$ se verificam para t =2, e portanto, D $\in$ r.

• para E = (5, -4, 3) as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ 3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t (t =3 satisfaz a 1ª equação mas não as duas outras). Logo, E $\notin$ r.

e) Determinar os valores de m e n para que o ponto F = (m, 5, n) pertença à r.

Solução:

Para que F pertença à r, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases}$$ devem se verificar para algum real t.

Da equação 5 = 3 – 2t, obtemos t = -1. Substituindo t nas outras equações, temos:

$$\begin{cases} m = 2 + (-1) = 1 \\ n = -4 + 3(-1) = -7 \end{cases}$$

f) Escrever outra equação paramétrica de r.

Solução:

Tomando o ponto B = (3, 1, -1) de r obtido no item (b) e o vetor diretor $2\vec{v}$ = (2, -4, 6), temos a seguinte equação paramétrica de r.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

g) Escrever equações paramétricas da reta s que passa pelo ponto G = (5, 2, -4) e é paralela à r.

Solução:

Como s | | r, o vetor $\vec{v}$ = (1, -2, 3) também é vetor diretor de s. As equações paramétricas de s são

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

Exemplo 5: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A = (2,3,-4) e é paralela ao eixo dos y.

Solução:

Como r é paralela ao eixo dos y, um de seus vetores diretores é $\vec{j}$ = (0, 1, 0). Logo, equações paramétricas de t são

$$\begin{cases} x = 2 + 0.t \\ y = 3 + 1.t \\ z = -4 + 0.t \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = -4 \end{cases}$$

Exemplo 6: Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos A = (-4, 1, 2) e B = (1, 1, 3).

Solução:

O vetor diretor de r é o vetor $\vec{AB}$ = B – A = (1, 1, 3) – (-4, 1, 2) = (5, 0, 1). Como ponto da reta, podemos escolher A ou B. Escolhendo B temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Exercícios

1. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B, nos seguintes casos:

a) A = (3, -1, 4) e B = (4, 0, 5)
b) A = (-1, 5, 7) e B = (8, 1, 9)
c) A = (0, 1, 3) e B = (-1, -1, 2)
d) A = (-1, -2, -3) e B = (8, 9, 10)
e) A = (-1, -1, 0) e B = (0, 0, 0)
f) A = (0, 0, 0) e B = (2, 0, 0)

2. Escreva equações paramétricas da reta que passa pelo ponto A = (1, 0, 3) e pelo ponto médio do segmento $\vec{BC}$, onde B = (1, 7, 8) e C = (1, -7, 2).

3. Escrever equações paramétricas das retas que passam pelo ponto A = (4, -5, 3) e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.

4. Dada a reta r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6 ($y = 6$);
b) a abscissa seja igual à ordenada ($x = y$);
c) a cota seja o quádruplo da abscissa ($z = 4x$).

5. A reta r passa pelo ponto A = (4, -3, -2) e é paralela à reta s:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Se P = (m, n, -5) $\in$ r, determine m e n.

6. Determinar o ponto P = (m, 1, n) que pertence à reta que passa pelos pontos A = (3, -1, 4) e B = (4, -3, -1).

7. Considere o triângulo de vértices A = (-1, 4, -2), B = (3, -3, 6) e C = (2, -1, 4). Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado $\overrightarrow{AB}$ e pelo vértice C.

8. Os pontos M_1 = (2, -1, 3), M_2 = (1, -3, 0) e M_3 = (2, 1, -5) são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter as equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

Equações simétricas da reta

Considere as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A = (a, b, c) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, onde x_1, y_1 e z_1 são não nulos.

$$\begin{cases} x = a + tx_1 \\ y = b + ty_1 \\ z = c + tz_1 \end{cases}$$

Isolando t nas três equações, obtemos

$$t = \frac{x-a}{x_1} \qquad t = \frac{y-b}{y_1} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{z-c}{z_1}$$

Podemos escrever então

$$\frac{x-a}{x_1} = \frac{y-b}{y_1} = \frac{z-c}{z_1}$$

Estas equações recebem o nome de **equações simétricas da reta r** que passa pelo ponto A = (a, b, c) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$.

Exemplo 1: Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto A = (3, 0, -5) e tem direção do vetor $\vec{v}$ = (2, 2, -1).
Solução:
As equações são

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

Note que se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuir um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para x = 5, tem-se

$$\frac{5-3}{2} = 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

O que implica que y = 2 e z = -6. Logo, (5, 2, -6) pertence à r.

Exercício proposto

1. Escreva equações simétricas da reta paralela ao vetor v e que passa pelo ponto A, nos seguintes casos:
a) A = (-3, 4,-1) $\vec{v}$ = (1, -1, 2)
b) A = (3, 4, 2) $\vec{v}$ = (1, -1, 0)
c) A = (-1, 2,-1) $\vec{v}$ = (0, 0, 3)
d) A = (0, 0, 0) $\vec{v}$ = (1, 2, 1)
e) A = (3, 5, 18) $\vec{v}$ = (5, 20, -14)
f) A = (0, 0, 0) $\vec{v}$ = (1, 0, 0)

Exemplo 3: Determine as equações paramétricas da reta

$$\frac{x-4}{3} = y + 1 = 2z - 1.$$

Solução: Observe inicialmente que $2z - 1 = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$.

Logo, um ponto da reta é (4, -1, 1/2) e um vetor diretor é (3, 1, 1/2).
As equações paramétricas são

$$x = 4 + 3t, \; y = -1 + t \; \text{ e } \; z = 1/2 + t/2.$$

Exemplo 4: Determine um ponto e um vetor diretor da reta dada pelas seguintes equações simétricas

$$\frac{3x-2}{7}=\frac{1-y}{4}=z+5$$

Solução:
Primeiramente, reescrevemos cada membros acima de forma mais conveniente.

$$\frac{3x-2}{7}=\frac{3(x-2/3)}{7}=\frac{x-2/3}{7/3}$$

$$\frac{1-y}{4}=\frac{-(y-1)}{4}=\frac{y-1}{-4}$$

$$z+5=\frac{z-(-5)}{1}$$

Logo, as equações dadas equivalem a

$$\frac{x-2/3}{7/3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-(-5)}{1}$$

Portanto, elas representam uma reta que contém o ponto (2/3, 1, -5) e tem o vetor (7/3, -4, 1) como vetor diretor.

Exercícios

1. Determine um ponto e um vetor diretor da reta dada pelas seguintes equações simétricas. Em seguida, escreva as equações paramétricas das seguintes retas:

a) $\frac{1-x}{8}=\frac{2y+4}{3}=\frac{z-1}{2}$

b) $\frac{4+5x}{7}=\frac{3-2y}{2}=z+2$

c) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-8}{9}$

d) $\frac{3x+1}{2}=\frac{4y+1}{3}=\frac{5z-1}{18}$

e) $x=y=z$

2. Verificar se os pontos A = (5, -5, 6) e B = (4, -1, 12) pertencem à reta

$$r:\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$$

3. Determinar o ponto da reta $r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{4}$ que possui
a) abscissa 5;
b) ordenada 2.

Nota:
Qual a finalidade de estudar tantas formas de equações da reta? Acontece que cada uma tem suas características próprias que, bem exploradas, simplificam certas tarefas. A forma vetorial é intrínseca e não depende de sistema de coordenadas. Por isso, é útil em situações teóricas ou quando não se fixou um sistema. A forma paramétrica e sua forma vetorial equivalente permitem a caracterização dos pontos da reta com o auxílio de um único parâmetro t, o que, na prática, leva à redução do número de incógnitas (em vez de três, x, y, e z, trabalhamos com uma, t). A forma simétrica, que não apresenta parâmetro, exibe relações que as coordenadas dos pontos da reta devem manter entre si. Um aspecto comum às três formas é a funcionalidade visual: basta olhar as equações para obter um ponto da reta e um vetor diretor.

Capítulo II

EQUAÇÕES DA RETA - APLICAÇÕES

Retas ortogonais e perpendiculares

Dadas as retas r e s, cujos vetores diretores são $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente. Utilizando propriedades do produto interno que estudamos no módulo sobre vetores, podemos concluir que r é ortogonal à s se e somente se $\vec{u} \perp \vec{v}$. Recordemos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é zero ($\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$). Portanto, podemos escrever

$$\text{r é ortogonal a s} \Leftrightarrow \vec{u} \,.\, \vec{v} = 0.$$

Ressaltamos que retas ortogonais podem ser concorrentes (ou seja, podem interceptarem-se) ou não. Caso sejam concorrentes, dizemos que são perpendiculares.

Exemplo 1: Verifique se as retas r e s abaixo são ortogonais

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ \quad = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 10 + t/3 \end{cases}$$

Solução:
Temos das equações acima que $\vec{u}$ = (-1, 1, 3) e $\vec{v}$ = (2, 1, 1/3) são os vetores diretores de r e s, respectivamente. Como

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (-1, 1, 3) \,.\, (2, 1,) = (-1).2 + 1.1 + 3. \; = 0,$$

concluímos que r e s são ortogonais.

Exemplo 2: Verifique se as retas r e s abaixo são ortogonais

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = y = z$$

Solução:
De forma análoga ao exemplo anterior, temos que $\vec{u}$ = (-2, 0, 6) e $\vec{v}$ = (2, 1, 1) são os vetores diretores de r e s, respectivamente. Como

$$\vec{u}.\vec{v} = (-2, 0, 6) \,.\, (2, 1, 1) = (-2).2 + 0.1 + 6.1 \neq 0,$$

concluímos que r e s não são ortogonais.

Exercícios

1. Decidir se as retas r e s são ortogonais ou não, nos seguintes casos:

a) r: $x = 2t$ $\quad y = 1 - t$ $\quad z = 1$
 s: $x = t$ $\quad y = 1 + 2t$ $\quad z = 30 + 10t$

b) r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{5}$
 s: $x = 1 + 2t$ $\quad y = -t$ $\quad z = -t$

c) r: $\frac{1-2x}{5} = y = z$
 s: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$

2. Determine m de modo que sejam ortogonais as retas r e s, nos casos:

a) r: $\frac{2x-1}{2} = 3 - y = 2 - z$
 s: $x = mt$ $\quad y = 3$ $\quad z = 1 - t$

b) r: $x = 1 - t$ $\quad y = 2 + t$ $\quad z = 3$
 s: $\frac{x}{m} = \frac{y}{2m} = z - 1$

c) r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-4}{2m}$

s: $\frac{x}{m}=\frac{2y-1}{4m}=z$

d) r: $\frac{3x-2}{1}=\frac{3-4y}{2}=z$

s: $x = 1 + 3mt$ $\quad y = 2mt$ $\quad z = 1$

3. Determine a reta que passa pelo ponto A = (1, 3, 5) e intercepta o eixo z perpendicularmente.

Intersecção de retas

Duas retas r e s são **concorrentes**, ou seja, elas se interceptam em um ponto P se e somente se P verificar simultaneamente as equações de r e s. Isto equivale a dizer que o sistema obtido igualando as equações de r e s tem solução única. Isto será mais bem compreendido através dos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

r: $x = 1 - 2t$ $\quad y = 2 + 4t$ $\quad z = - t$
s: $x = 1 + t'$ $\quad y = t'$ $\quad z = 1 - t'$

Solução:
Igualando as respectivas equações, temos o seguinte sistema de equações nas incógnitas t e t′:

$1 - 2t = 1 + t'$ $\quad 2 + 4t = t'$ $\quad -t = 1 - t'$

Devemos agora verificar se o sistema acima tem solução única. Para isso, vamos considerar um sistema formado por quaisquer duas delas, digamos pelas duas primeiras equações, e depois verificar se a solução encontrada satisfaz a equação restante. Considerando o sistema formado pelas duas primeiras equações com t e t′ como incógnitas, temos

$$\begin{cases} 2t + t' = 0 \\ 4t - t' = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos t = - 1/3 e t'= 2/3. Estes valores verificam a terceira equação.

Portanto as retas se interceptam no ponto cujas coordenadas podem ser calculadas substituindo t = - 1/3 nas equações de r ou t' = 2/3 nas equações de s:

r: $\quad x = 1 - 2(- 1/3) = 5/3$
$\quad y = 2 + 4(- 1/3) = 2/3$
$\quad z = - (- 1/3) = 1/3$

Portanto, o ponto de intersecção é P = (5/3, 2/3, 1/3).

Exemplo 2: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

r: $x = 2t$ $\quad y = -1$ $\quad z = 4 + t$

s: $x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{6}$

Solução:
Substituindo x, y e z nas equações de s pelas suas respectivas expressões nas equações de r, obtemos

$$2t-1=\frac{-1-2}{4}=\frac{4+t}{6}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2t-1=-\frac{3}{4} \\ \frac{4+t}{6}=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos t = 1/8 e da segunda t = - 17/2. Isto significa que o sistema não tem solução, e portanto as retas não tem ponto em comum.

Exemplo 3: Verifique se as retas r e s abaixo são concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-1$

s: $x = y = z$

Solução:

Das equações de s temos y = x e z = x. Substituindo nas equações de r, obtemos:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{x-1}{3}=x-1$$

Da primeira igualdade, obtemos

$$3(x-1)=2(x-1)$$

e resolvendo esta equação chegamos a x =1. A segunda igualdade (x – 1) = 3 (x – 1), também fornece x = 1. Assim, x = y = z = 1 é a única solução do sistema formado pelas equações de r e s. Concluímos daí que r e s são concorrentes e que P = (1, 1, 1) é o ponto de intersecção.

Exercícios

1. Decidir se as retas r e s são ou não concorrentes. Caso afirmativo, dê o ponto de intersecção:

a) r: $x = 5 - 2t \quad y = 3 - t \quad z = t$
   s: $x = 2 + t' \quad y = t' \quad z = 3 - t'$

b) r: $x = 2t \quad y = 1 - t \quad z = 0$
   s: $x = 1 + t' \quad y = 1 - t' \quad z = -1 + t'$

c) r: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5}$
   s: $\frac{x-4}{6}=\frac{y}{9}=\frac{z-2}{15}$

d) r: $x = 1 + t \quad y = 1 - t \quad z = t$
   s: $x - 1 = y - 1 = z$

e) r: $X = (1, 0, 1) + t(2, 1, 3)$ s: $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{6}$

2. Determinar a reta que passa pelo ponto A = (0, 1, 0) e pelo ponto de intersecção das retas

$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{2}=-y \\ z=3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$$

Ângulo entre retas

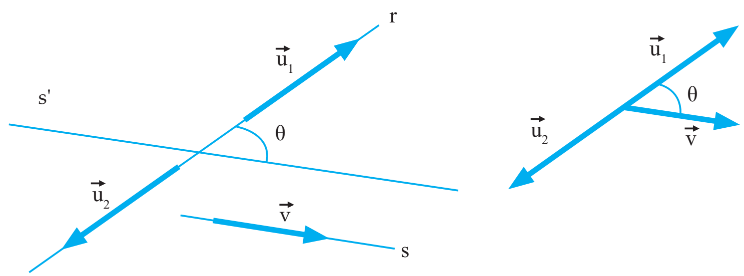
Para melhor compreendermos a definição de ângulo entre retas, vamos inicialmente considerar as posições relativas entre duas retas no espaço, definindo o ângulo em cada uma delas. Depois veremos que todos estes casos podem ser tratados de forma única. Observemos que com duas retas r e s no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

• **As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são concorrentes:** então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos;

• **As retas são paralelas (ou coincidentes):** ângulo entre elas é igual a zero;

• **As retas são reversas, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam:** então existe uma reta s′ paralela à s e que intercepta r. Neste caso, o ângulo entre r e s é definido como sendo o ângulo entre r e s′.

Podemos unificar os casos acima da seguinte forma: consideremos duas retas r e s. Seja s′ uma reta paralela à s e que intercepta r (se s intercepta r então faça s′ = s). O ângulo entre r e s, denotado por θ, é definido como o menor ângulo entre r e s′, como ilustrado a seguir.



Esta definição leva imediatamente à conclusão de que θ = 0° se r e s são paralelas, e θ = 90° se r e s são ortogonais. Em qualquer outro caso, 0 < θ < 90°.

O leitor mais atento já deve ter observado na figura acima que o ângulo entre r e s pode ser obtido a partir do ângulo entre um vetor diretor de r e um vetor diretor de s. Vejamos então como calculá-lo.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de r e s, respectivamente, e seja α o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Note que, à princípio, não sabemos os sentidos de e . Por exemplo, na figura acima, não sabemos se estamos tomando $\vec{u}_1$ ou $\vec{u}_2$ como vetor diretor de r. Logo, dependendo dos sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podemos ter:

• $0 \leq \alpha \leq 90°$. Neste caso, $\theta = \alpha$, ou seja, α é o ângulo entre as retas r e s;

• $90° < \alpha \leq 180°$. Neste caso, $\theta = 180° - \alpha$, ou seja, α é o complemento do ângulo entre r e s. Note que $\cos\theta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, neste caso.

Resumindo estes cálculos em termos dos cossenos dos ângulos θ e α, temos

- $\cos\theta = \cos\alpha$, no primeiro caso;
- $\cos\theta = -\cos\alpha$, no segundo caso.

Em ambos os casos temos que $\cos\theta = |\cos\alpha|$.

Pelo estudo que fizemos do produto interno, sabemos que

$$|\cos\alpha| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Logo, o ângulo θ entre as retas r e s é dado por:

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 1: Calcular o ângulo entre as retas

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solução:
Os vetores diretores de r e s são, respectivamente, $\vec{u} = (1, 1, -2)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 1)$. Pela fórmula acima, temos:

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{|(1,1,-2).(-2,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos(1/2) = 60°$.

Exemplo 2: Calcular o ângulo entre as retas r: (1, 1, 9) + t(0, -1, 1) e s: $x - y + 3 = z = 4$.

Solução:
Como se vê facilmente, um vetor diretor de r é $\vec{u} = (0, -1, 1)$. Uma forma de obter um vetor diretor de s é tomar dois pontos A e B em s e calcular o vetor $\vec{v} = \vec{AB} = B - A$. Por exemplo, A = (1, 0, 4) e B = (2, 1, 4) são pontos de s, pois satisfazem sua equação. Logo, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ é um vetor diretor de s. Aplicando a fórmula acima, temos:

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{|(0,-1,1).(1,1,0)|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, $\theta = \arccos(1/2) = 60°$.

Exercícios

1. Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $s: \frac{x}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{1}$

b) $r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y = \frac{z+1}{-1} \\ x = 4 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$

2. Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas:

a) $r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ e $s: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$ e s: eixo y

3. Obtenha as equações de uma reta que contem o ponto P = (1, -2, 3) e forma ângulos de 45° e 60°, respectivamente com os eixos Ox e Oy.

4. Obtenha as equações de uma reta r que contem o ponto P = (1, 1, 1) e é concorrente com a reta s: x = 2y = 2z, sabendo que o cosseno do ângulo entre r e s é $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

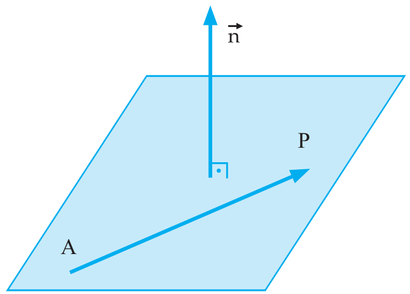
5. A diagonal AC de um quadrado ABCD está contida na reta r : (1, 0, 0) + t (0, 1, 1). Conhecendo A = (1, 1, 0), determine os outros três vértices.

Capítulo III

EQUAÇÕES DO PLANO

Equação geral do plano

Seja π é um plano. Qualquer vetor não nulo ortogonal a π será chamado de **vetor normal a π.** Se um vetor $\vec{n}$ = (a, b, c) é normal a π e A = (x_0, y_0, z_0) é um ponto de π, um ponto P = (x, y, z) pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$. Sabemos que dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre eles é zero. Logo, P pertence a π se, e somente se,



$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

Desenvolvendo esta expressão obtemos:

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Fazendo $- ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta equação é chamada de **equação geral do plano** π.

Observações:

• Assim como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π, qualquer vetor paralelo a $\vec{n}$ também é normal a π. Alem disso, também é normal a qualquer plano paralelo a π.

• É importante notar que os três coeficientes a, b e c da equação geral do plano representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano é dado por $3x + 2y - z + 1 = 0$, um de seus vetores normais é $(3, 2, -1)$.

• Para obter pontos de um plano dado pela sua equação geral, basta atribuir valores arbitrários para duas de suas variáveis e calcular o valor da outra na equação dada. Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$3\,(4) + 2\,(-2) - z + 1 = 0$$
$$12 - 4 - z + 1 = 0$$
$$z = 9$$

e, portanto, o ponto $(4, -2, 9)$ pertence a este plano.

Exemplo 1: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, -1, 3)$ e tem $= (3, 2, -4)$ como vetor normal.

Solução:

Como $\vec{n}$ é vetor normal a π, sua equação geral é $3x + 2y - 4z + d = 0$. Sendo A um ponto de π, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é,

$$3\,(2) + 2\,(-1) - 4\,(3) + d = 0$$
$$6 - 2 - 12 + d = 0$$
$$d = 8$$

Logo, uma equação geral de π é $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Exercícios

1. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e

tem $\vec{n}$ como vetor normal, nos seguintes casos:

a) $A = (0, 1, 2)$ $\quad \vec{n} = (2, -6, -1)$
b) $A = (1, 1, 0)$ $\quad \vec{n} = (1, -1, 1)$
c) $A = (0, 0, 0)$ $\quad \vec{n} = (1, 1, 1)$
d) $A = (5, 3, 6)$ $\quad \vec{n} = (2, -10, 0)$
e) $A = (0, 3, 4)$ $\quad \vec{n} = (1, 0, 0)$

2. Obtenha equação geral para os três planos coordenados Oxy, Oxz e Oyz.

3. Dado o plano $\pi : 3x + y - z - 4 = 0$, calcular:
a) O ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;
b) O ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;
c) O valor de k para que o ponto $(k, 2, k - 1)$ pertença a π;
d) O ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota.

4. Representar graficamente os planos de equações:
a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$
b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$
e) $3x + 4z + 12 = 0$
f) $2z - 5 = 0$
g) $y + 4 = 0$
h) $2x - y = 0$

Exemplo 3: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, 1, 3)$ e é paralela ao plano $\pi_1 : 3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

Solução:

Como π é paralelo a π_1, o vetor $\vec{n} = (3, -4, -2)$, normal a π_1, é também normal a π. Logo, a equação geral de π é da forma

$$3x - 4y - 2z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é, $3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0$, de onde concluímos que $d = 4$. Portanto, uma equação de π é

$$3x - 4y - 2z + 4 = 0.$$

Exercícios

1. Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é paralela ao plano π, nos casos:

a) A equação de π é $2x - y + z - 4 = 0$

b) A equação de π é $x - y - z + 10 = 0$

c) A equação de π é $z = 0$

2. Dado o plano $\pi : 3x + y - z - 4 = 0$, calcular o valor de k para que o plano $\pi_1 : kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Exemplo 5: A reta r : $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A = (2, 1, -2). Determinar uma equação geral de π.

Solução:

Como $r \perp \pi$, o vetor $\vec{n}$ = (3, 2, 1), vetor diretor de r, é vetor normal a π. Logo, a equação geral de π é da forma

$$3x + 2y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, devemos ter 3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0, de onde concluímos que d = -6. Portanto, uma equação de π é

$$3x + 2y + z - 6 = 0.$$

Exercícios

1. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é ortogonal à reta r, nos casos:

a) A = (-1, 0, 2) r: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

b) A = (0, 2, 2) r: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$

c) A = (-1, 2, 3) r: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$

2. Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto médio do segmento que liga A = (5, -1, 4) e B = (-1, -7, 1) e é perpendicular a esse segmento.

Exemplo 7: Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A = (-3, 0, 1) e é paralelo ao plano π_1 que contém os vetores $\vec{u}$ = (2, 1, 3) e $\vec{v}$ = (-1, 0, 1).

Solução:

Como π é paralelo a π_1, qualquer vetor ortogonal a π_1 é vetor normal a π. Pelo estudo que fizemos sobre produto vetorial, sabemos que um vetor ortogonal π_1 é $\vec{u} \wedge \vec{v}$, que pode ser calculado por

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} . \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} . \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} . \vec{k}$$

$$= 1.\,\vec{i} - 5.\,\vec{j} + 1.\,\vec{k}$$

$$= (1, -5, 1).$$

Logo, a equação geral de π é da forma

$$x - 5y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, devemos ter 1(-3) – 5(0) + 1(1) + d = 0, e daí d = 2. Portanto, uma equação geral de π é

$$x - 5y + z + 2 = 0.$$

Exercícios

1. Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, onde

a) A = (0, 0, 8)	$\vec{u}$ = (4, 1, 2)	$\vec{v}$ = (-2, -1, 2)
b) A = (-7, 1, 1)	$\vec{u}$ = (-3, -1, 2)	$\vec{v}$ = (-1, 1, -1)
c) A = (0, 0, 0)	$\vec{u}$ = (1, 2, 3)	$\vec{v}$ = (-1, 1, 2)
d) A = (1, 1, -1)	$\vec{u}$ = (3, -1, -2)	$\vec{v}$ = (-1, -2, 1)
e) A = (1, 0, 1)	$\vec{u}$ = (0, 1, 0)	$\vec{v}$ = (-1, 0, 1)

2. Obter uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C, nos casos:

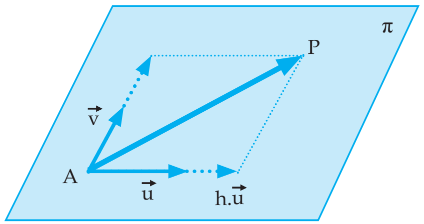
a) A = (2, 2, 2)	B = (2, 0, 2)	C = (2, 4, 6)
b) A = (4, 2, -2)	B = (0, -2, 2)	C = (2, 4, 2)
c) A = (-3, 1, -2)	B = (-4, 1, 1)	C = (-2, 0, -2)

3. Obter uma equação geral do plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

4. Obter uma equação geral do plano π, nos seguintes casos:
a) π é paralelo ao eixo dos z e contém os pontos (0, 3, 4) e (2, 0, -2);
b) π é paralelo ao eixo dos x e contém os pontos (-2, 0, 2) e (0, -2, 1);
c) π é paralelo ao eixo dos y e contém os pontos (2, 3, 0) e (0, 4, 1);
d) π é perpendicular ao eixo dos y e contém os pontos (3, 4, -1);
e) π contém o ponto (1, -2, 1) e o eixo dos x.

Equações paramétricas do plano

Seja π é um plano. Considere um ponto A pertencente a π e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos a π, porém não paralelos entre si, como ilustrado na figura abaixo. Então um ponto P pertence a π se e somente se os vetores P – A, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a π, o que equivale a dizer que P – A pode ser expresso como uma soma de múltiplos escalares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mais precisamente, P pertence a π se e somente se existem escalares h e t tais que $P - A = h\,.\,\vec{u} + t\,.\,\vec{v}$.



Logo,

$$P = A + h\,.\,\vec{u} + t\,.\,\vec{v}.$$

Esta equação é chamada **equação vetorial de** π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os vetores diretores.

Considerando as coordenadas dos pontos e vetores acima, digamos,

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v}$ = (b1, b2, b3),

a equação vetorial acima fica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h\,.\,(a_1, a_2, a_3) + t\,.\,(b_1, b_2, b_3).$$

Esta equação também pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x = x_0 + ha_1 + tb_1 \\ y = y_0 + ha_2 + tb_2 \\ z = z_0 + ha_3 + tb_3 \end{cases}$$

equações estas chamadas de **equações paramétricas de** π.

Exemplo 1: Obter equações paramétricas do plano π que contém o ponto A = (2, 1, -1) e possui $\vec{u}$ = (3, 4, 5) e $\vec{v}$ = (-1, 0, 4) como vetores diretores.
Solução:
Temos imediatamente:

$$\begin{cases} x = 2 + h.3 + t(-1) \\ y = 1 + h.4 + t.0 \\ z = -1 + h.5 + t.4 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 2 + 3h - t \\ y = 1 + 4h \\ z = -1 + 5h + 4t \end{cases}$$

De forma análoga à equação paramétrica da reta, se desejarmos obter pontos do plano π, basta atribuirmos valores para h e t. Por exemplo, para h = 0 e t = 1 obtém-se

$$x = 1; \quad y = 1 \quad e \quad z = 3,$$

e portanto, o ponto (1, 1, 3) $\in \pi$. De forma análoga,

- Para h = 1 e t = 0 obtém-se (x, y, z) = (5, 5, 4);
- Para h = -1 e t = 2 obtém-se (x, y, z) = (-3, -3, 2);
- Para h = 2 e t = 1 obtém-se (x, y, z) = (7, 7, 13);
- Para h = 1 e t = 1 obtém-se (x, y, z) = (4, 5, 8),

e assim por diante. Todos os pontos acima obtidos pertencem a π. Se h e t assumirem todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos de π.

As seguintes observações também são pertinentes:

• A cada valor real de h e t corresponde um único ponto P de π. Reciprocamente, a cada ponto P de π corresponde um único valor real de h e t.

• A equação paramétrica de um plano π não é única. Na verdade, existem infinitas equações, pois basta tomar por exemplo um outro ponto de π (em vez de A) ou outro par de vetores diretores, que teremos uma outra equação paramétrica de π.

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A e tem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores diretores, nos casos:

a) A = (1, 2, 3)	$\vec{u}$ = (4, 5, 6)	$\vec{v}$ = (7, 8, 9)
b) A = (-1, 0, 1)	$\vec{u}$ = (2, 1, 3)	$\vec{v}$ = (-1, 2, 1)
c) A = (0, 0, 1)	$\vec{u}$ = (3, 1, 2)	$\vec{v}$ = (1, 3, 2)
d) A = (0, 0, 0)	$\vec{u}$ = (1, 0, 0)	$\vec{v}$ = (0, 1, 0)
e) A = (1, 1, 1)	$\vec{u}$ = (2, 2, 2)	$\vec{v}$ = (-1, 2, 4)

2. Escreva equações paramétricas dos três planos coordenados Oxy, Oxz e Oyz.

3. Escreva equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A = (1, 2, 4) e é paralelo ao plano de equação vetorial (x, y, z) = (-1, 0, 2) + h.(1, 1, 2) + t.(4, 1, 3).

4. Escreva equações paramétricas do plano que passa pelo ponto A = (-1, 4, 9) e é paralelo ao plano de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 30 + h + t \\ y = 40 - h - t \\ z = 50 + h - t \end{cases}$$

Exemplo 3: Escreva equações paramétricas do plano que passa pelos pontos A = (1, 1, 2), B = (-1, 1, -1) e C = (2, 2, 4).

Solução:

Precisamos obter os vetores diretores de π. Para isso, podemos fazer:

$$B - A = (-1, 1, -1) - (1, 1, 2) = (-2, 0, -3)$$
$$C - A = (2, 2, 4) - (1, 1, 2) = (1, 1, 2)$$

Como esses vetores não são paralelos, podemos tomá-los como vetores diretores de π. Logo, uma equação paramétrica de π é

$$\begin{cases} x = 1 - 2h + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3h + t \end{cases}$$

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que passa pelos pontos A, B e C, nos casos:

a) A = (1, -1, 1)	B = (1, 1, 1)	C = (0, 0, 1)
b) A = (-4, -2, -1)	B = (-5, -3, -2)	C = (0, 0, -1)
c) A = (0, 0, 0)	B = (1, 1, 1)	C = (2, 2, 3)
d) A = (-7, 0, 2)	B = (10, 1, 2)	C = (7, 7, 1)

Exemplo 5: Um plano π contém a reta r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + t.(2, 1, 1) e o ponto P = (1, 2, 3). Obtenha equações paramétricas de π.

Solução:

Como π contém r, um vetor paralelo à r é também paralelo a π. Logo, $\vec{u}$ = (2, 1, 1) é um vetor paralelo a π. Tomando o ponto A = (1, 1, 0) de r, outro vetor paralelo a π é o vetor P – A = (1, 2, 3) – (1, 1, 0) = (0, 1, 3).

Como os vetores e P – A são paralelos a π e não paralelos entre si, podemos tomá-los como vetores diretores de π. Logo, uma equação paramétrica de π é .

$$\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 2 + h + t \\ z = 3 + h + 3t \end{cases}$$

Exercícios

1. Obter equações paramétricas do plano que contém a reta r e o ponto P, nos casos:

a) P = (1, 1, 4) r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t.(1, 1, 1)

b) P = (0, 0, 2) r é a reta que passa por A = (1, 1, -1) e B = (0, 2, 3)

Equações paramétricas x Equação geral

Veremos nesta seção como obter uma equação geral de um plano a partir da sua equação paramétrica e vice-versa.

Exemplo 1: Dadas as seguintes equações paramétricas de um plano:

$$\begin{cases} x = 1 - 2h + t \\ y = 2 + h - 2t \\ z = 3 + h \end{cases}$$

Obtenha uma equação geral do plano.

Solução:

Podemos reconhecer imediatamente nas equações acima um ponto A = (1, 2, 3) do plano, $\vec{u}$ = (-2, 1, 1) e $\vec{v}$ = (1, -2, 0), vetores diretores do plano. Agora podemos proceder como no exemplo 4.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} . \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} . \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} . \vec{k}$$

$$= 2.\,\vec{i} - (-1).\,\vec{j} + 3.\,\vec{k}$$
$$= (2, 1, 3).$$

Logo, a equação geral de π é da forma

$$2x + y + 3z + d = 0.$$

Como A é um ponto do plano, devemos ter 2(1) + 1(2) + 3(3) + d = 0, e daí d = -13. Portanto, uma equação geral de π é

$$2x + y + 3z - 13 = 0.$$

Exercícios

1. Dadas equações paramétricas de um plano, obter uma equação geral:

a) $x = 1 + 2h + t$	$y = h - t$	$z = h + t$
b) $x = 1 - h - t$	$y = 0$	$z = h - 2t$
c) $x = h + 2t$	$y = h - t$	$z = 2 - 2h$
d) $x = h$	$y = t$	$z = 1$
e) $x = 1 + 2h - t$	$y = 1 - h$	$z = 2 - h + 2t$
f) $x = 30$	$y = 10 + h + t$	$z = 10 - h - t$

Exemplo 3: Um plano π tem a seguinte equação geral: $2x - 3y + 5z - 2 = 0$. Obtenha equações paramétricas de π.

Solução:

Uma forma de resolver este problema é determinarmos três pontos A, B e C não colineares de π e procedermos como no exemplo 3. Uma outra forma mais direta é a seguinte: fazendo $y = h$ e $z = t$ na equação dada, temos

$$2x - 3h + 5t - 2 = 0,$$

de onde resulta

$$x = 1 + \frac{3}{2}h - \frac{5}{2}t \;, y = h \;\; \text{e} \;\; z = t,$$

que são as equações paramétricas de π.

De forma mais geral, o procedimento acima pode ser realizado do seguinte modo:

se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de um plano, então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

- se $a \neq 0$, faça $y = h$ e $z = t$
- se $b \neq 0$, faça $x = h$ e $z = t$
- se $c \neq 0$, faça $x = h$ e $y = t$

Assim, por exemplo, se a equação for $y - 3z - 2 = 0$, fazemos $x = h$ e $z = t$. A equação fica $y - 3t - 2 = 0$. Logo, $y = 3t + 2$, e as equações paramétricas são:

$$x = h, \quad y = 2 + 3t \quad \text{e} \quad z = t.$$

Exercícios

1. Dadas a equação geral de um plano, obter equações paramétricas do mesmo, nos casos:

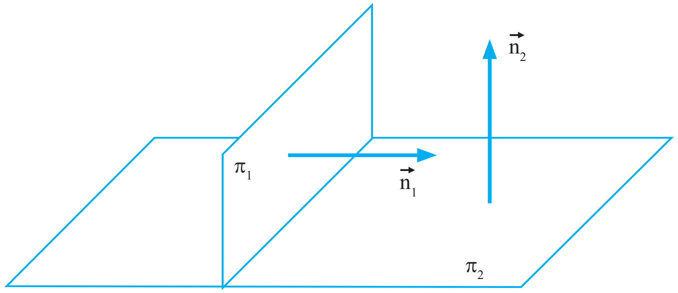
a) $x + 3y - 5z - 2 = 0$
b) $10x - y + z = 0$
c) $5x - y = 0$
d) $2y - 14z - 3 = 0$
e) $x + z = 0$
f) $z - 3 = 0$

Capítulo IV

EQUAÇÕES DO PLANO - APLICAÇÕES

Planos perpendiculares

Dados os planos π_1 e π_2, sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Então π_1 e π_2 são perpendiculares se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais.



Recordando as propriedades sobre produto interno de vetores, temos que

π_1 e π_2 são perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Os exemplos a seguir pedem para verificar se os planos dados são perpendiculares. Em qualquer caso, o procedimento é sempre o mesmo: obter vetores normais a cada um dos planos dados e verificar se o produto interno entre eles é igual a zero. A diferença entre esses exemplos está na forma de obter os vetores normais. Se o plano for dado através de uma equação geral, um vetor normal

pode ser obtido de forma imediata. Mas se ele for dado através de uma equação paramétrica, precisaremos fazer um cálculo de determinante para obter um vetor normal.

Exemplo 1: Verifique se os planos $\pi_1 : 4x + 10y - z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - y + 2z = 0$ são perpendiculares.

Solução:

Lembre-se de que em uma equação geral do plano, um vetor normal é dado pelos coeficientes de x, y e z. Portanto, $\vec{n}_1 = (4, 10, -1)$ e $\vec{n}_2 = (3, -1, 2)$ são vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Como

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (4, 10, -1) \cdot (3, -1, 2) = 4 \cdot 3 + 10 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0,$

π_1 e π_2 são perpendiculares.

Exercícios

1. Verifique se os planos π_1 e π_2 são perpendiculares.

a) $\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$ $\quad$ $\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$
b) $\pi_1 : 2x - 11y + 4z - 1 = 0$ $\quad$ $\pi_2 : x + y - z = 0$
c) $\pi_1 : x + 3y - z + 1 = 0$ $\quad$ $\pi_2 : 4x - y + z = 0$

2. Determine m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares.

a) $\pi_1 : mx + y - z = 0$ $\quad$ $\pi_2 : x - my + mz - 1 = 0$
b) $\pi_1 : mx + y - 3z - 1 = 0$ $\quad$ $\pi_2 : mx - my + 1 = 0$
c) $\pi_1 : x + my + 5z = 0$ $\quad$ $\pi_2 : 4x - my + z = 0$
d) $\pi_1 : x + y + z - m = 0$ $\quad$ $\pi_2 : -x + y + m = 0$

Exemplo 3: Verifique se os planos $\pi_1 : x - y = 0$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = h \\ y = h + t \\ z = 1 - h + t \end{cases}$ são perpendiculares.

Solução:

Temos que $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ é um vetor normal a π_1. Para obter um vetor $\vec{n}_2$ normal a π_2, observe que $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$ são vetores diretores de π_2. Assim, eles pertencem a π_2. Podemos então obter um vetor $\vec{n}_2$ normal a π_2 fazendo

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, -1, 0) \cdot (2, -1, 1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 3 \neq 0$, π_1 e π_2 não são perpendiculares.

Exemplo 4: Verifique se os planos $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = h \\ z = t \end{cases}$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = h \end{cases}$ são perpendiculares.

Solução:
Das equações de π_1, temos que (1, 1, 0) e (-2, 0, 1) são vetores diretores desse plano. Logo

$\vec{n}_1 = (1, 1, 0) \wedge (-2, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 2)$ é um vetor normal a π_1.

Analogamente, um vetor normal a π_2 é

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0).$$

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 0) = -2 \neq 0$, π_1 e π_2 não são perpendiculares.

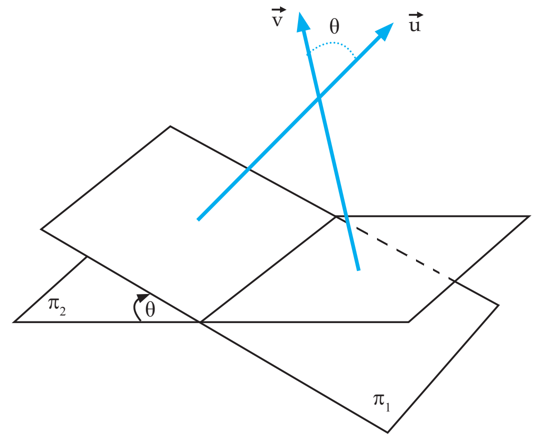
Exercícios

1. Verifique se os planos π_1 e π_2 são perpendiculares.
a) $\pi_1 : x + y - 2z - 4 = 0$ $\quad \pi_2 : \; x = 2h - t \quad y = 1 + t \quad z = h$

b) $\pi_1 : \; x = 1 + h \quad y = 2 + h - t \quad z = 3 - h$
$\pi_2 : \; x = 1 + h \quad y = 2 - h + t \quad z = 3 - h$

Ângulo entre planos

A medida do ângulo entre dois planos π_1 e π_2 é definida como a medida do ângulo entre duas retas r e s, respectivamente perpendiculares a π_1 e π_2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de r e s, respectivamente. Note que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente.



Utilizando os resultados do Capítulo II, sobre ângulo entre retas, temos que o ângulo π entre r e s é dado por

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$$

Exemplo 1: Determine a medida do ângulo entre os planos
$\pi_1 : 4x - 11y + 5z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x + z = 0$

Solução:
Das equações dos planos, temos que $\vec{u} = (4, -11, 5)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ são vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Então

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 1 + (-11) \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 9$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-11)^2 + 5^2} = \sqrt{162}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Daí teremos

$$cos\ \theta = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{9}{\sqrt{162}.\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{324}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Portanto, θ = 60°.

Exercícios

1. Calcule a medida do ângulo entre os planos π_1 e π_2, nos casos:

$\pi_1 : x - y = 0$ $\quad$ $\pi_2 : y = 0$
$\pi_1 : x + y = 0$ $\quad$ $\pi_2 : x = 0$
$\pi_1 : x - y = 0$ $\quad$ $\pi_2 : x + y = 0$
$\pi_1 : x + y + z = 1$ $\quad$ $\pi_2 : z = 0$
$\pi_1 : 2x - y + z = 0$ $\quad$ $\pi_2 : x + 4y - z - 1 = 0$

Observe que, assim como na seção anterior, o cálculo da medida do ângulo entre dois planos depende unicamente de encontrarmos vetores normais a cada um dos planos dados, o que pode ser imediato (caso o plano seja dado por uma equação geral) ou não (se ele seja dado por uma equação paramétrica). Portanto, acreditamos que o leitor está preparado para resolver os exercícios a seguir.

2. Calcule a medida do ângulo entre os planos π_1 e π_2, nos casos:

a) $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases}$ $\quad$ $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$

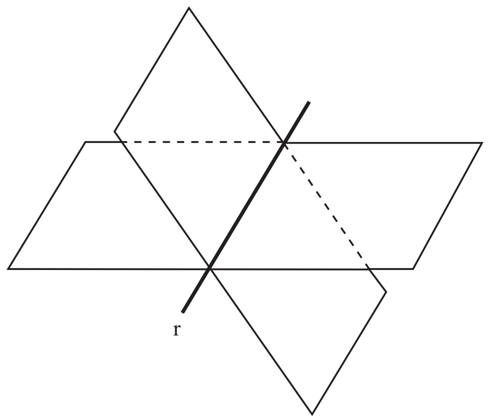
$\pi_1 : x + y - 2z = 0$ $\quad$ $\pi_2 :\ x = -4 + h \quad y = 0 \quad z = 2 + t$

2. Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos

$\pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0$ $\quad$ e $\quad$ $\pi_2 : 4x + 5y + 3z + 2 = 0$

Intersecção de planos

A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta cujas equações desejamos determinar.



Para tanto, dentre os vários procedimentos, apresentaremos três, através dos exemplos a seguir. Para fazer os exercícios propostos, o leitor pode utilizar aquele que ele achar mais conveniente.

Exemplo 1: Determine a reta r, intersecção dos planos
$\pi_1 : 5x - y + z - 5 = 0$ $\quad$ e $\quad$ $\pi_2 : x + y + 2z - 7 = 0$

Solução 1:
Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto (x, y, z) de r devem satisfazer simultaneamente as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema r:

$$r : \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem infinitas soluções (são os infinitos pontos de r). Fazendo, por exemplo, x = t e resolvendo o sistema em função de t,

temos $r : \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 4 \end{cases}$ que são as equações paramétricas de r.

Note que, de forma análoga, podemos também fazer y = t ou z = t, e resolver o sistema em função de t.

Solução 2:
Um outro procedimento é obter dois pontos de r, e a partir deles um vetor diretor. Por exemplo, fazendo x = 0 nas equações de π_1 e π_2,

obtemos $-y+z-5=0$ e $y+2z-7=0$, donde $z=4$ e $y=-1$. Logo, o ponto $A=(0,-1,4)\in r$.
Fazendo agora $x=1$, obtemos $y=2$ e $z=2$. Logo, $B=(1,2,2)\in r$.

Temos agora dois pontos de r, e portanto, o vetor $B-A=(1,3,-2)$ é vetor diretor de r. Logo, r : são as equações paramétricas de r.

Solução 3:
Como $\vec{u}=(5,-1,1)$ e $\vec{v}=(1,1,2)$ são vetores normais à π_1 e π_2, respectivamente, um vetor diretor de r é dado por

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3,-9,6).$$

Por comodidade, podemos usar $1/3\,(-3,-9,6)=(-1,-3,2)$ como vetor diretor de r. Assim, tomando um ponto qualquer de r, por exemplo $A=(0,-1,4)$, podemos obter suas equações paramétricas

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=3t-1 \\ z=-2t+4 \end{cases}.$$

Exercícios

1. Dê equações da reta intersecção dos planos π_1 e π_2, nos casos:
a) $\pi_1: x+y-z=0$ $\quad \pi_2: x+y+z=1$
b) $\pi_1: x-y+z=0$ $\quad \pi_2: x+y-z=0$
c) $\pi_1: 3x+y-3z-5=0$ $\quad \pi_2: x-y-z-3=0$
d) $\pi_1: 2x+y-4=0$ $\quad \pi_2: z=5$
e) $\pi_1: 2x-y+z=0$ $\quad \pi_2: x=h \quad y=h+t \quad z=2h-t$

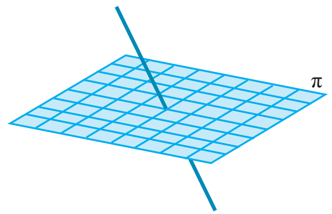
Sugestão: Uma forma de resolver o item (e) é obter inicialmente a equação geral de π_2, como estudado na Capítulo 3, e depois proceder de forma análoga à solução 3.

2. Mostre que as retas abaixo são paralelas

$$r_1:\begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 8x-2y-3z+1=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2:\begin{cases} x-3y+z+3=0 \\ 3x-y-z+5=0 \end{cases}$$

Intersecção de reta e plano

A intersecção entre um plano π e uma reta r não paralela à π é um ponto.



Os procedimentos para determinar este ponto serão ilustrados nos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π, onde

$$r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=5+3t \\ z=3-t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x-y+3z-4=0$$

Solução:
Qualquer ponto de r é da forma $(x,y,z)=(-1+2t,\,5+3t,\,3-t)$. Se um deles pertence ao plano π, suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$2(-1+2t)-(5+3t)+3(3-t)-4=0,$$

o que resulta em $t=-1$. Substituindo este valor nas equações de r, obtém-se

$$x=-1+2(-1)=-3, \quad y=5+3(-1)=2, \quad z=3-(-1)=4$$

Logo, a intersecção de r e π é o ponto $(-3,2,4)$.

Exemplo 2: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π, onde

$$r:\begin{cases} x=2-2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: y-z=0$$

Solução:
Procedendo como no exemplo anterior, qualquer ponto de r é da forma $(x,y,z)=(2-2t,\,3+t,\,t)$. Substituindo estes valores na equa-

ção de π, obtemos $(3 + t) - t = 0$, ou seja, $3 = 0$, o que é um absurdo. Isto significa que r é paralela ao plano π (r e π não tem pontos em comum).

Exemplo 3: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π, onde

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: y - z = 0$$

Solução:
Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (2 - 2t, t, t)$. Substituindo estes valores na equação de π, obtemos $t - t = 0$, ou seja, $0 = 0$, o que é sempre verdadeiro. Isto significa que qualquer ponto de r é também ponto de π, ou seja, r pertence a π.

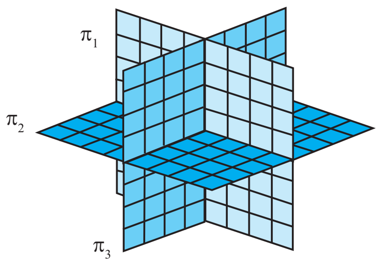
Exemplo 4: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π, onde

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: x + 3y + 2z - 5 = 0$$

Solução:
Observe que um ponto de r satisfaz as equações dos dois planos que determina r. Logo, se existir um ponto (x, y, z) que pertence à r e a π, suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados, isto é, ele será solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, (2, -1, 3) é a intersecção de r e π. Observe que, no exemplo acima, o ponto obtido está na intersecção de três planos, como ilustrado na figura abaixo.



Exercícios

1. Determine (caso exista) o ponto de intersecção da reta r com o plano π, nos casos:

a) $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \pi: x + y + z = 1$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \pi: x + 2y + z = 0$

c) $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \pi: 2x - y + z = 1$

d) $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \pi: 3x - y = 3$

2. A reta r é a intersecção dos planos π_1 e π_2 dados por
$\pi_1: 2x + 2y - z = 3$ e $\pi_2: x + y - z = 0$

Obtenha a intersecção de r com o plano $\pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$.

3. A reta intersecção dos planos dados, respectivamente, por $x - 2y - 4z = 1$ e $x + 2y = 3$ é paralela ao plano dado por $x - 2z = 3$?

4. Calcular k de modo que a reta determinada por A = (1, -1, 0) e B = (k, 1, 2) seja paralela ao plano $\pi: x = 1 + 3h, \; y = 1 + 2h + t, \; z = 3 + 3t$.

5. Calcular valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π, nos casos:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad \pi: 2mx - ny - z + 4 = 0$

b) $r: (x, y, z) = (n, 2, 0) + t\,(2, m, n) \qquad \pi: x - 3y + z = 1$

Capítulo V

DISTÂNCIAS

Distância entre dois pontos

O estudo da distância entre dois pontos já foi realizado na seção sobre módulo de um vetor. Portanto, faremos aqui apenas uma breve recordação deste tópico.

Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, a distância d entre A e B é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo 1: Calcular a distância d entre os pontos $A = (2, -1, 3)$ e $B = (1, 1, 5)$.

Solução: $d = \sqrt{(1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Exercícios

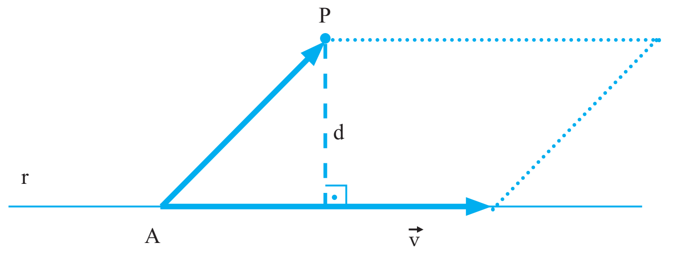
1. Calcular a distância entre os pontos A e B, nos casos:

a) A = (1, 0, -1) B = (-1, 0, 1)
b) A = (1, 2, 1) B = (1, -1, 0)
c) A = (0, 1, 0) B = (1, -2, -3)
d) A = (0, 0, 1) B = (1, 0, 0)
e) A = (4, 0, 1) B = (1, 1, 1)

Distância de ponto a reta

A distância d de um ponto P à uma reta r é definida como sendo

a distância de P ao ponto de r mais próximo de P. Em outras palavras, a distância de um ponto a uma reta é aquela correspondente à medida do segmento de extremidades no ponto e na sua projeção ortogonal sobre a reta.



Esta distância pode ser obtida da seguinte forma: consideremos na reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d procurada, como ilustrado na figura acima. Para determinarmos esta altura, vamos primeiro escrever a área do paralelogramo de duas formas, e depois igualarmos as expressões:

$$\text{área} = \text{base} \,.\, \text{altura} = \|\vec{v}\| \,.\, d$$

ou também, como vimos no estudo do produto vetorial, temos:

$$\text{área} = \|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AP}\|$$

Igualando estas duas expressões, obtemos:

$$d = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Esta é a fórmula que será utilizada para calcular a distância do ponto P à reta r.

Exemplo 1: Calcular a distância d do ponto $P = (2, 1, 4)$ à reta $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Solução:
A reta passa pelo ponto A = (-1, 2, 3) e tem direção do vetor $\vec{v} = (2, -1, -2)$. Os demais elementos da fórmula são:
• O vetor $\overrightarrow{AP}$ é dado por $\overrightarrow{AP} = P - A = (3, -1, 1)$.

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -8, 1)$$

Portanto,

$$d = \frac{\|(-3,-8,1)\|}{\|(2,-1,-2)\|} = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{74}}{3}$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P à reta r, nos casos:

a) P = (1, 0, 3) $\quad r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

b) P = (1, 1, 0) $\quad r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$

c) P = (0, 1, -1) $\quad r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$

d) P = (3, 0, 1) $\quad r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

e) P = (0, 0, 0) $\quad r: \dfrac{x-1}{2} = y = z$

No exemplo acima, calculamos a distância do ponto P à reta r onde r é dada por sua equação paramétrica. A reta r, porém, pode ser dada de outras formas, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3: Calcular a distância d do ponto $P = (1/2, 3/2, 0)$ à reta r, intersecção dos planos dados por $x - y - z = 1$ e $x + y = 0$.
Solução:
Como (1, -1, -1) e (1, 1, 0) são vetores normais aos planos, um vetor diretor $\vec{v}$ de r é dado por (veja Capítulo 4).

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 2)$$

Para obter um ponto A de r fazemos, por exemplo, $x = 1/2$ nas equações dos planos, obtendo $y = -1/2$ e $z = 0$. Logo, $A = (1/2, -1/2, 0)$ é um ponto de r. Agora, procedemos como no exemplo anterior, calculando os elementos necessários para aplicar a fórmula da distância.

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (0, 2, 0)$
- $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 0, 2)$

Portanto,

$$d = \frac{\|(-4,0,2)\|}{\|(1,-1,2)\|} = \frac{\sqrt{(-4)^2+0^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P à reta r, dada pela intersecção de dois planos, nos casos:
a) P = (1, 1, -1) $\quad r: \; 2x - z = 1 \quad x - y - 1 = 0$
b) P = (0, -1, 0) $\quad r: \; x + y - 3z = 0 \quad x - z = 1$
c) P = (1, 2, 3) $\quad r: \; x + y = 1 \quad y + 2z = 4$

2. Calcule a distância do ponto P = (1, 1, -1) a cada eixo coordenado.

Para terminar esta seção, vale à pena observar que esta não é a única forma de calcular a distância entre ponto e reta. Uma outra forma pode ser dada pelos seguintes passos:

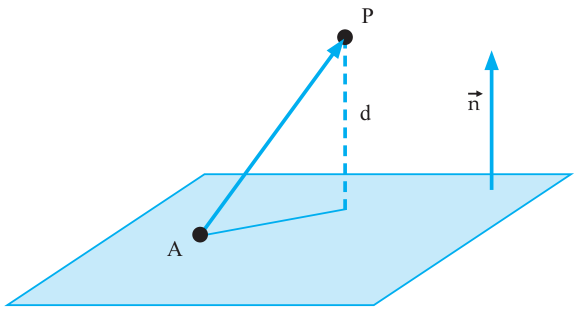
1. Encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r (observe que um vetor normal a π é um vetor diretor de r);

2. Determinar o ponto I de intersecção de π e r;

3. A distância de P à r é a distância de P a I.

Distância de ponto a plano

De forma análoga à distância de ponto a reta, a distância d de um ponto P a um plano π é definida como a distância de P ao ponto de π mais próximo de P. Para calcular esta distância, tomemos um vetor $\vec{n}$ normal a π e um ponto A de π. Então a distância d é a norma da projeção do vetor $\overrightarrow{AP}$ sobre o vetor $\vec{n}$.



Utilizando a fórmula da projeção de um vetor sobre outro, temos:

$$d = \|\text{proj}_n \overrightarrow{AP}\| = \left\| \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\| = \frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|^2}$$

Resulta que

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Exemplo 1: Calcular a distância d do ponto $P = (4, 5, 6)$ ao plano π dado pela equação $x + 2y - 2z - 14 = 0$.

Solução:

Um ponto de π é A = (0, 7, 0) e um vetor normal a π é n = (1, 2, -2). Assim,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (4, 5, 6) - (0, 7, 0) = (4, -2, 6).$$

Substituindo estes dados na fórmula acima, temos

$$d = \frac{\|(4,-2,6).(1,2,-2)\|}{\|(1,2,-2)\|} = 12/3 = 4.$$

Exercícios

1. Calcular a distância do ponto P ao plano π, dado por uma equação geral, nos casos:

a) P = (1, 0, 3) $\quad \pi: \; 3x + 4y - 1 = 0$
b) P = (1, 1, 1) $\quad \pi: \; 2x - 3y + z - 2 = 0$
c) P = (4, 2, -3) $\quad \pi: \; 2x + 3y - 6z + 3 = 0$
d) P = (2, -1, 2) $\quad \pi: \; 2x + 2y - z + 3 = 0$
e) P = (3, -1, 4) $\quad \pi: \; x + y + z = 0$
f) P = (0, 0, 0) $\quad \pi: \; 3x - 4y + 20 = 0$

2. Calcule a distância do ponto P = (2, 5, -7) a cada plano coordenado.

Eventualmente, o plano π pode não ser dado por uma equação geral, de forma que a obtenção do seu vetor normal não seja imediata. Mas isto requer apenas um passo a mais para obtê-lo, o que não é nenhuma grande dificuldade. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3: Calcular a distância d do ponto $P = (1, 4, 3)$ ao plano π dado pela equação paramétrica $x = -3 - h + t, \quad y = 1, \quad z = 3 + 3t.$

Solução:

• Um ponto de π é A = (-3, 1, 3). Assim, $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 4, 3) - (-3, 1, 3) = (4, 3, 0)$

• Um vetor normal a π é

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0, 3, 0)$$

Substituindo estes dados na fórmula, temos

$$d = \frac{\|(4,3,0).(0,3,0)\|}{\|(0,3,0)\|} = 9/3 = 3.$$

3. Calcular a distância do ponto P ao plano π, dado por equações paramétricas, nos casos:

a) P = (1, 1, 1) $\quad \pi: \; x = -h - t \quad y = h \quad z = t$
b) P = (1, 2, 3) $\quad \pi: \; x = 2 - h - t \quad y = t \quad z = h$
c) P = (2, 3, -1) $\quad \pi: \; x = 3 + t \quad y = -2t \quad z = 1 - 2t$
d) P = (1, -1, 0) $\quad \pi: \; x = 2 + t \quad y = 0 \quad z = t$

e) $P = (1, 1, 1)$ $\pi: x = 2 + 2h + 3t$ $y = -1 + h + t$ $z = 2 - h$

Uma **outra forma de calcular a distância de ponto a plano** pode ser dada pelos seguintes passos:

1. Determinar a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano π (um vetor diretor de r é um vetor normal a π é);
2. Determinar o ponto I de intersecção de π e r;
3. A distância de P à r é a distância de P a I.

Também é importante ressaltar que o cálculo da distância de ponto a plano também pode ser utilizado para calcular as seguintes distâncias:

• **distância entre dois planos paralelos:** basta calcular a distância de um ponto qualquer de um plano ao outro.

• **distância entre reta e plano paralelos:** basta calcular a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

Exemplo 5: Calcular a distância da reta $r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ ao plano $\pi: 4x - 4y + 2z - 4 = 0$.

Solução:

Um vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, 2, 2)$, e um vetor normal a π é $\vec{n} = (4, -4, 2)$. Observemos primeiramente que r | | π, pois $\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 2, 2) \cdot (4, -4, 2) = 0$. Tomando um ponto $P = (0, 3, 1)$ de r e um ponto $A = (0, 0, 2)$ de π, temos:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (0, 3, 1) - (0, 0, 2) = (0, 3, -1)$. Logo, a distância de r a π é dada por

$$d = \frac{\|(0,3,-1).(4,-4,2)\|}{\|(4,-4,2)\|} = 7/3 .$$

4. Calcular a distância da reta r ao plano π, nos casos:

a) $r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$ $\pi: x - y - 2z + 4 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\pi: x + y - 12 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\pi: y = 0$

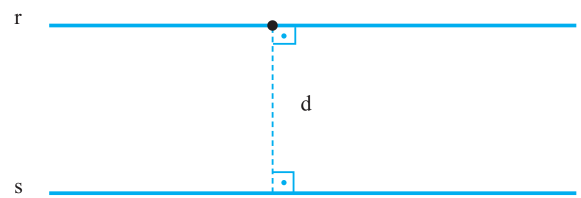
5. Calcular a distância entre os planos $\pi_1: x + y + z = 4$ e $\pi_2: 2x + 2y + 2z = 5$.

Distância entre retas

Dadas as retas r e s, vamos determinar a distância d entre elas. Para isso, precisamos determinar inicialmente a posição relativa entre r e s, o que pode ser obtida pelo produto vetorial entre os vetores diretores de r e s. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de r e s, respectivamente, e consideremos $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

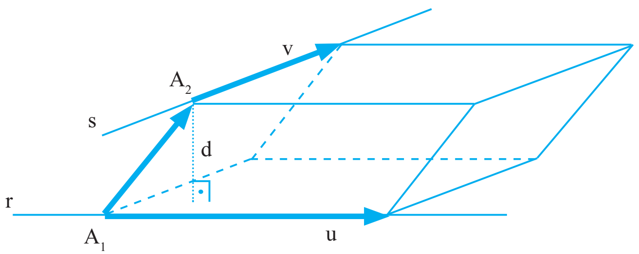
1°. Caso: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, o que significa que r e s são paralelas. Logo, r e s coincidem ou não. Se r e s coincidem então d = 0. No outro caso, tomando um ponto A um ponto de r, a distância entre r e s é a distância entre A e s.



2°. Caso: $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos. Logo, r e s são concorrentes ou reversas. Se r e s são concorrentes então d = 0. Se r e s são reversas sejam A_1 e A_2 pontos de r e s, respectivamente. Os vetores r, s e $\overrightarrow{A_1A_2}$, por serem não-coplanares, determinam um paralelepípedo cuja altura é a distância d entre r e s que queremos calcular.



O volume V do paralelepípedo é dado por:

$$V = (\text{área da base}) \,.\, (\text{altura}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \,.\, d$$

Ou também pelo módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]|$$

Igualando estas duas expressões, temos:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

Exemplo 1: Calcular a distância entre as retas $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ e

$s: \begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Solução:

A reta r passa pelo ponto $A_1 = (-1, 3, -1)$ e tem $\vec{u} = (1, -2, -1)$ como vetor diretor. A reta s passa pelo ponto $A_2 = (0, -3, 1)$ e tem $\vec{v} = (1, 1, -1)$ como vetor diretor.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 0, 3) \neq \vec{0}.$$

Logo, estamos no caso 2 acima.

- $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (1, -6, 2)$
- $|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 9$
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Portanto, à distância entre as retas r e s é:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Eventualmente, as retas podem não ser dadas por uma equação paramétrica, de forma que a obtenção do seu vetor diretor não seja imediata. Mas isto não requer grande esforço adicional, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2: Calcular a distância entre as retas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = 9 + 3t \end{cases}$ e s,

dada pela intersecção dos planos $y + z = 5$ e $x + y + z = 6$.

Solução:

A reta r passa pelo ponto $A_1 = (1, 4, 9)$ e tem $\vec{u} = (0, 1, 3)$ como vetor diretor. Das equações de s temos que $A_2 = (1, 2, 3)$ pertence à s, e como (0, 1, 1) e (1, 1, 1) são vetores normais aos planos dados, um vetor diretor de s pode ser obtido por

$$\vec{v} = (0, 1, 1) \wedge (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

Agora temos $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 0) \neq \vec{0}$.

Portanto, estamos no caso 2 novamente. Procedendo como no exemplo anterior, temos:

- $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (0, -2, -6)$
- $|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$

Portanto, independentemente do valor de $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$, a distância entre as retas r e s é:

$$d = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{A_1A_2}]\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{0}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = 0$$

OBS: Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos (pois $\vec{u} \wedge \vec{v}$) e d = 0, as retas r e s são concorrentes. Na verdade, o ponto (1, 2, 3) pertence a ambas.

Exercícios

1. Calcular a distância entre as retas r e s, nos casos:

a) $r: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 4t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 7 - 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ e s é a intersecção dos planos $3x + y - 3z = 0$ e

$y - z = 2$

c) r é a intersecção dos planos $x = 2y - 1$ e $y - z - 1 = 0$, e s é a intersecção dos planos $x + y - z = 0$ e $y + z + 1 = 0$

2. Calcule a distância entre a reta dada pela intersecção dos planos $x = 3$ e $y = 4$, e o eixo dos z.

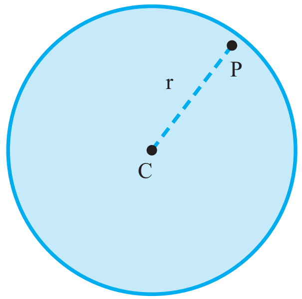
Capítulo VI

SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Equação de uma superfície esférica

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações. Nesta seção estudaremos suas principais equações e como determinar seus elementos a partir destas.

Sejam $C = (a, b, c)$ um ponto do espaço R^3 e r um número real. A **superfície esférica** S de centro C e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância a C é igual a r.



Traduzindo esta definição para uma equação, observe inicialmente que a distância de P a C é dada por

$$\|P - C\| = \|(x - a, y - b, z - c)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\,.$$

Logo, P está em S se e somente se

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Esta equação é chamada de **equação reduzida da superfície S.**

Desenvolvendo os quadrados na equação acima, temos

$x^2 + y^2 + z^2 – 2ax – 2by – 2cz + a^2 + b^2 + c^2 – r^2 = 0$

chamada de **equação geral de S**.

Exemplo 1: Determine a equação reduzida e a equação geral da superfície esférica de centro C = (1, -2, 0) e raio 3.
Solução:
A equação reduzida é

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$$

cujo desenvolvimento

$$x^2 – 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = 9$$

nos dá a equação geral pedida:

$$x^2 + y^2 + z^2 – 2x + 4y – 4 = 0$$

Exercícios

1. Determine a equação reduzida e a equação geral da superfície esférica de centro C e raio r, nos casos:
a) C = (-1, -1, 2) r = 2
b) C = (0, 1, 0) r = 1
c) C = (0, 0, 0) r = 3
d) C = (1, 1, 1) r = 4

Vamos agora exercitar a recíproca do exercício anterior, ou seja, vamos decidir se uma dada equação representa ou não uma superfície esférica e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e o raio. Para isto, vamos usar a técnica de **completar quadrado**, ilustrada a seguir, e que se baseia nas seguintes identidades

$$(x+ a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Vejamos um exemplo. A expressão $x^2 – 3x$ também pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 + 3x = x^2 + 2\frac{3}{2}x = x^2 + 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Observe que fizemos inicialmente aparecer o 2, tomando o cuidado de dividir por 2 para manter a igualdade. Daí, naturalmente aparece o candidato a a, no caso, 3/2. Então somamos $(3/2)^2$ e subtraímos esse mesmo valor para manter a igualdade. Temos então o quadrado perfeito $(x + 3/2)^2$.

Outro exemplo:

$$x^2 + 8x = x^2 + 2\frac{8}{2}x = x^2 + 2.4x + 4^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 16$$

Exemplo 3: Decida se a equação $x^2 + y^2 + z^2 – x – 2y – 3z = 0$ é de uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.
Solução:
Inicialmente, completemos os quadrados para cada uma das variáveis da equação:

- $x^2 - x = x^2 - 2\frac{1}{2}x = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
- $y^2 - 2y = y^2 - 2.1.y = y^2 - 2.1.y + 1^2 - 1^2 = (y-1)^2 - 1$
- $z^2 - 3z = z^2 - 2\frac{3}{2}z = z^2 - 2\frac{3}{2}z + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

Substituindo estas expressões na equação dada, temos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

ou seja,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{14}{4} = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2$$

Trata-se de uma superfície esférica de centro C = (1/2, 1, 3/2) e raio $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Exemplo 4: Decida se a equação $x^2 + y^2 + z^2 – x – 2/3y + 19/9 = 0$ é de uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.
Solução:
Repetindo o procedimento do item anterior, temos

- $x^2 - \frac{2}{3}x = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$
- $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$

• a variável z já aparece como quadrado perfeito (z^2)

Substituindo na equação dada, vem

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y-1)^2+z^2+1=0$$

o que resulta em

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y-1)^2+z^2=-1$$

Como o primeiro membro é não-negativo e o segundo é negativo, não existem x, y e z que satisfazem a equação dada, de modo que não se trata de uma superfície esférica.

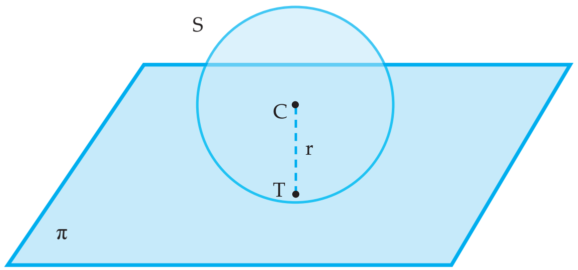
Exercícios

1. Decida se a equação dada representa uma superfície esférica. Em caso afirmativo, dê o centro e raio.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z + 7 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 15 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - -2z + 4 = 0$
d) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36x - 6v - 8 = 0$
e) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Plano tangente

Um plano π é tangente a uma superfície esférica S de centro C e raio r se e somente se a distância de C a π é igual a r. Neste caso, o ponto comum à S e π é chamado de ponto de tangência. Observe que o ponto de tangência T é tal que o vetor T – C é normal a π.



Exemplo 1: Dê uma equação geral do plano π tangente à superfície esférica S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ no ponto T = (1, 4, 0) de S.
Solução:
Usando o método de completar quadrados, obtemos a seguinte equação reduzida de S:
S: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$
concluímos daí que S possui centro C = (1, 1, 0) e raio r = 3.

Como T – C = (1, 4, 0) – (1, 1, 0) = (0, 3, 0) é vetor normal a π, uma equação geral de π é da forma $3y + d = 0$. Como T = (1, 4, 0) pertence a π, substituindo T na equação de π temos d = -12. Portanto, uma equação de π é $3y - 12 = 0$, ou $y - 4 = 0$.

Exercícios

1. Dê uma equação geral do plano tangente à superfície esférica S no ponto T de S, nos casos:

a) S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0$ T = (-1, 1, -1)
b) S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$ T = (1, , 1)
c) S: $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ T = (-3, 3, -3)

Exemplo 3: Um plano π é tangente à superfície esférica
S: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3$ e é paralelo ao plano α: $x + y - z - 40 = 0$.
Determine uma equação geral de π.
Solução:
Como π é paralelo a α e o vetor $\vec{n}$ = (1, 1, -1) é normal a α, temos que também é normal a π. Portanto, a equação geral de π tem a forma $x + y - z + d = 0$.

Resta-nos agora determinar d. Para isso, utilizamos a condição de que a distância do centro C = (1, 0, 0) de S a π é igual ao raio r = $\sqrt{3}$ de S (pela fórmula da distância de ponto a plano).

$$\frac{|\overrightarrow{AC}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\sqrt{3}$$

onde A é um ponto qualquer de π. Observe que A = (0, 0, d) é um ponto de π. Temos então o vetor $\overrightarrow{AC}$ = C – A = (1, 0, -d). Daí vem

$$\frac{|(1,0,-d).(1,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|1+0+d|}{\sqrt{3}}=\frac{|d+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Isto é, $|d+1| = 3$, o que resulta em d = 2 ou d = -4. Portanto, há dois planos nas condições do enunciado. Suas equações são:

$x + y - z + 2 = 0$ e $x + y - z - 4 = 0$

2. Determine uma equação geral do plano π tangente à superfície esférica S e paralelo ao plano α, nos casos:

a) S: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 6$ π: $2x + y + z = 0$

b) S: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ π: $2x + y - z + 14 = 0$

c) S: $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2$ π: $ax + y - z = 9$

Referências

Boulos, P. e Camargo, I. – Introdução à geometria analítica no espaço. Ed. Makron Books, 1997.

Camargo, I., e Boulos, P. – Geometria analítica, um tratamento vetorial, 3a. Edição, Ed. Pearson, 2006.

Corral, M. – Vector Calculus – Schoolcraft Colege – 2008.

Kléténic – Problemas de geometria analítica. Ed. Livraria Cultura Brasileira, 1977.

Murdoch, D. C. – Geometria analítica. Ed. LTC S.A., 2a. Edição, 1978.

Santos, Reginaldo J. – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

Steinbruch, A. e Winterle, P. – Geometria analítica. Ed. McGraw-Hill, 1987.

Venturi, J. R. – Álgebra Vetorial e Geometria Analítica – 9a. Edição, Curitiba (PR). ISBN: 85.85132-48-5.

Winterle, P. – Vetores e geometria analítica, Ed. Pearson, 2007.

ead

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA
Coordenação e registro: Editora UFMS
Projeto gráfico: Lennon Godoi
Editoração eletrônica: Marcos Paulo de Souza
Fotolitos: Cromoarte - Editora e Publicidade Ltda