Lista 3 de Álgebra Linear – Espaços Vetoriais

1) Verifique se cada um dos conjuntos abaixo é um espaço vetorial com as operações usuais:

a) $S_1 = \{ (x, y) \in R^2 : \ y = -x \}$

b) $S_2 = \{ (x, y) \in R^2 : y = x + 1 \}$

c) $S_3 = \{ (x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0 \}$.

2) Considere os vetores $\vec{v_1} = (1, 2)$, $\vec{v_2} = (2, -1)$, $\vec{v_3} = (0, 2)$, $\vec{v_4} = (3, -2, 1)$, $\vec{v_5} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v_6} = (1, 1, 0)$. Determine se são LI ou LD os vetores

a) $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

b) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$

c) $\vec{v_4}$ e $\vec{v_5}$

d) $\vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ e $\vec{v_6}$

3) Verifique quais dos seguintes conjuntos formam uma base para o R^2 :

a) { (1,2), (-1,3) }
b) { (0,0), (2,3) }
c) { (3,-1), (2,3) }
d) { (3,-1), (-6,2) }

4) Para que valor(es) de k o conjunto { (1,k), (k,4) } é base do R^2?

5) Considere os vetores $\vec{v_1} = (1, 0, -1)$, $\vec{v_2} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v_3} = (0, -1, 0)$ do R^3.

a) Mostre que $A = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é base do R^3.

b) Escreva $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ como combinação linear dos vetores da base A.

6) Considere os conjuntos abaixo:

$$A = \{ (x, y) \in R^2 : x + y = 0 \}; \ B = \{ (x, y, z) \in R^3 : z = 0 \} \text{ e } C = \{ (x, y, z) \in R^3 : y = 5x \text{ e } z = 0 \}.$$

a) Verifique que A é um subespaço de R^2 e que B e C são subespaços de R^3.

b) Determine uma base para cada um desses conjuntos e determine a dimensão de cada um deles:

7) Considere os vetores $\vec{v_1}$ = (1, 2, 0), $\vec{v_2}$ = (2, -1), $\vec{v_3}$ = (-4, 2), $\vec{v_4}$ = (3, -2, 1) e $\vec{v_5}$ = (0, 1, 0).

Determine os espaços gerados por:

a) $\vec{v_1}$

b) $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$

c) $\vec{v_4}$ e $\vec{v_5}$

d) Qual é a dimensão de cada um dos espaços dos itens anteriores?

Respostas:

1) a) É espaço vetorial.

b) Não é espaço vetorial.

c) É espaço vetorial.

2) a) $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são LI.

b) $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ são LD.

c) $\vec{v_4}$ e $\vec{v_5}$ são LI.

d) $\vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ e $\vec{v_6}$ são LI.

3) Os conjuntos dos itens a) e c) formam uma base para o R^2.

4) Para $k \neq 2$ ou $k \neq -2$.

5) a) Mostre que A é LI (um dos caminhos para mostrar isto nos leva a um sistema 3x3 homogêneo) e depois mostre que A gera R^3, isto é, mostre que qualquer vetor do R pode ser escrito como combinação linear dos vetores de A(mais uma vez, um dos caminhos para mostrar isto nos leva a um sistema 3x3).

b) $\vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2} + \vec{v_3}$;

$\vec{e_2} = -\vec{v_3}$

$\vec{e_3} = -\frac{1}{2}\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2} + \vec{v_3}$

6) b) Para o conjunto A:

Uma possível base é o conjunto unitário { (1,-1) } (existem infinitas bases para A. Além disso, toda base de A é unitária e é formada por um vetor paralelo ao vetor (1,-1)).

Como uma possível base possui apenas um elemento, a dimensão de A é 1.

Para o conjunto B:

Uma possível base é o conjunto unitário { (1,0,0), (0,1,0) } (existem infinitas bases para B).

Como uma possível base possui dois elementos, a dimensão de A é 2.

Para o conjunto C:

Uma possível base é o conjunto unitário { (1,5,0) } (existem infinitas bases para C. Além disso, toda base de C é unitária e é formada por um vetor paralelo ao vetor (1,5,0)).

Como uma possível base possui apenas um elemento, a dimensão de C é 1.

7) a) $\{(x,y,z) \in R^3 \mid (x,y,z) = t(1,2,0)$, para algum $t \in R$ }, ou seja, o espaço gerado por $\vec{v}_1$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares do vetor $\vec{v}_1$, isto é, todos os vetores da forma t(1,2,0), para algum $t \in R$. Este conjunto é a reta que passa pela origem e que possui a direção de $\vec{v}_1$.

b) Podemos dizer que o espaço gerado por $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ é o conjunto

$$\{(x,y) \in R^2 \mid (x,y) = t(2,-1) + s(-4,2), \text{ onde } t,s \in R\},$$

ou seja, o espaço gerado por $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares dos vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, isto é, todos os vetores da forma t(2,-1) + s(-4,2), onde $t,s \in R$.

Também podemos notar que $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são múltiplos um do outro (são paralelos), ou seja, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LD. Logo, precisamos apenas de um deles para gerar o espaço gerado pelos dois, uma vez que um pode ser escrito com combinação linear do outro.

Portanto, uma possível representação do conjunto gerado por $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ é o conjunto

$$\{(x,y) \in R^2 \mid (x,y) = h(2,-1), \text{ para algum } h \in R\},$$

ou seja, o espaço gerado por $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares do vetor $\vec{v}_2$, isto é, todos os vetores da forma h(2,-1), para algum $h \in R$. Este conjunto é a reta que passa pela origem e que possui a direção de $\vec{v}_2$. (No final da resposta, poderíamos usar o vetor $\vec{v}_3$ no lugar de $\vec{v}_2$.)

c) O espaço gerado por $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$ é o conjunto

$$\{(x,y,z) \in R^3 \mid (x,y,z) = t(3,-2,1) + s(0,1,0), \text{ onde } t,s \in R\},$$

ou seja, o espaço gerado por $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares dos vetores $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$, isto é, todos os vetores da forma t(3,-2,1) + s(0,1,0), onde $t,s \in R$. Este espaço é o plano que passa pela origem e que possui $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$ como vetores diretores. (Observe que $\vec{v}_4$ e $\vec{v}_5$ são LI. Por isso eles geram um plano e não um reta como foi no item anterior.)

d) Os espaços dos itens a) e b) possuem dimensão 1 e o espaço do item c) possui dimensão dois.